Ștefan Smărăndoiu Marius Perianu Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VI-a

I

art Klett

Cuprins

Algebră

Geometrie

IV. Noțiuni geometrice fundamentale

V. Triunghiul

I.1 Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

O *mulțime* este o grupare de obiecte, simboluri etc., bine precizate și distincte, numite *elementele* mulțimii.
Mulțimile se notează de regulă cu litere mari: A, B, M, N, ..., iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

Mulțimea numerelor naturale
Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale*. Se notează $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

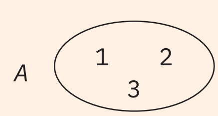
Mulțimea numerelor naturale nenule
Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale mai puțin 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule*. Se notează $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

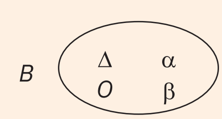
Relații între element și mulțime
Dacă M este o mulțime și x este un element al mulțimii M, se spune că *elementul x aparține mulțimii M* (pe scurt *x aparține lui M*) și se notează $x \in M$.
Dacă x nu este element al mulțimii M, se spune că *x nu aparține mulțimii M* și se notează $x \in M$.

Exemplu: Dacă $M = \{1, 2, 3\}$, avem $1 \in M$, $2 \in M$ și $3 \in M$, dar $0 \notin M$, $5 \notin M$.

Mulțimea vidă. Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\varnothing$ (de exemplu mulțimea elefanților de pe Lună).

Moduri de definire a mulțimilor
1. Enunțând o proprietate comună a elementelor acelei mulțimi.
   Exemple: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot x + 3 \leq 18\}$, $B = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$.
2. Prin enumerarea tuturor elementelor ei între acolade.
   Exemple: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$.
3. Prin enumerarea tuturor elementelor în interiorul unei linii curbe închise (numită diagrama Venn-Euler).
   Exemple:





Mulțimi finite. Mulțimi infinite
Reamintim că mulțimile cu un număr limitat de elemente se numesc *mulțimi finite*, iar mulțimile care nu au un număr finit de elemente se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:
1. Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este finită.
2. Mulțimea oamenilor de pe globul pământesc este finită.
3. Mulțimea numerelor naturale este infinită.
4. Mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7 este infinită.

Cardinalul unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Cardinalul mulțimii finite M este un număr natural care se notează card M.

Exemplu
Mulțimea $M = \{2, 5, 7, 8\}$ are patru elemente și scriem: card $M = 4$.

Exersare

1 Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{3, 5, 7, 9\}$. Pentru fiecare dintre elementele 0, 1, 2, 5, 6, 7, scrieți cărei mulțimi aparțin și căreia nu.

2 Este corect scrisă mulțimea $A = \{1 + 2, 2 + 3, 4 + 1, 7, 13\}$? Justificați.

3 Dintre următoarele mulțimi, cea care are cardinalul 3 este:
a $\{3\}$; **b** $\{0; 3\}$; **c** $\{0; 1; 2\}$; **d** $\{0; 3; 6; 9\}$.

4 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a $2 \in \{x \mid x \text{ divide } 16\}$; **b** $7 \in \{x \mid 2 \le x < 7\}$; **c** $21 \notin \{x \mid x = \overline{21c}\}$;
d $4^2 \in \{x \mid 2^3 < x < 2^5\}$; **e** $543 \in \{x \mid x \,\vdots\, 5\}$; **f** $10^3 \notin \{x \mid x \text{ se divide cu } 10\}$.

5 Determinați valoarea numărului natural x pentru care numărul natural 2 este element al mulțimii $A = \{2 \cdot x + 1, 2 \cdot x + 2, 2 \cdot x + 3\}$.

6 Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele:
a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le 7\}$; **d** $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \le x < 23\}$;
b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \le x \le 9\}$; **e** $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18 \text{ se împarte exact la } x\}$;
c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 < x \le 14\}$; **f** $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ impar}, x < 13\}$.
Reprezentați cele șase mulțimi utilizând diagrame Venn-Euler.

7 **a** Scrieți mulțimea numerelor naturale pare mai mici decât 14.
b Scrieți mulțimea numerelor naturale impare mai mici decât 11.
c Scrieți mulțimea numerelor naturale pare, de două cifre, divizibile cu 5.
d Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici decât 123, divizibile cu 25.
e Scrieți mulțimea numerelor naturale de trei cifre, cu toate cifrele egale.

8 Fie mulțimile $A = \{2, 7, 11, 20\}$, $B = \{x \mid x \text{ este predecesor al lui } m, \text{ unde } m \in A\}$ și $C = \{x \mid x \text{ este succesor al lui } m, \text{ unde } m \in A\}$. Scrieți prin enumerare, apoi utilizând diagrame Venn-Euler elementele mulțimilor B și C.

9 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \le 11\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot y + 1 \ge 37\}$;
$C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^n < 2^{10}\}$; $D = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 5^m + 3 > 130\}$.

10 Scrieți mulțimea A știind că are trei elemente și folosind informațiile următoare:
$7 \notin A$, $5 \in A$, $4 \notin A$, $2 \in A$, $1 \notin A$, $0 \in A$, $8 \notin A$, $6 \notin A$.

Rezolvați problema chiar aici:

11 Precizați mulțimile finite:

a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 13 \leq x \leq 31\}$;

b $B = \{2^0;\ 2^2;\ 2^4;\ 2^5\}$;

c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x > 212\}$;

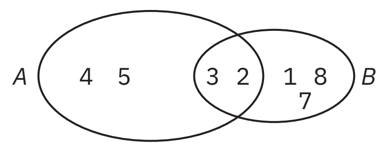
d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 50\}$;

e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 \leq 100\}$;

f $F = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 \geq 100\}$.

12 Scrieți elementele mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$. Comparați cardinalul lor și reprezentați mulțimile folosind diagrame Venn-Euler.

13 Precizați elementele celor două mulțimi din reprezentarea de mai jos.



Consolidare

14 În locul spațiilor punctate puneți unul dintre semnele $>$ sau $<$ sau $=$, pentru ca următoarele mulțimi să verifice relația scrisă în dreptul fiecăreia:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2x + 1 \ldots\ldots 39\}$ card $A = 19$;

$B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 4n \ldots\ldots 56\}$ card $B = 1$;

$C = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots m^2\}$ card $C = 6$.

15 Fie mulțimea $A = \{5, 9, 13, 17, ..., 201\}$. Determinați cardinalul mulțimii A și arătați că media aritmetică a elementelor din A nu aparține mulțimii A.

16 Fie mulțimea $A = \{15, 20, 25, ..., 85\}$.

a Scrieți elementele mulțimii A divizibile cu 10.

b Scrieți elementele mulțimii A divizibile cu 2.

c Determinați numărul de elemente al mulțimii A.

17 Scrieți mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 2x + 7 \leq 20\}$ prin enumerarea tuturor elementelor.

Rezolvați problema chiar aici:

18 Câte elemente are mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 7x + 3 = x + 28\}$?

19 Determinați numărul natural n știind că $11 \in \{3n + 5,\ 2n + 4\}$.

20 **a** Determinați $a \in \mathbb{N}$, astfel încât cardinalul mulțimii $\{a,\ 2a + 5,\ 3a + 1\}$ să fie 2.

b Determinați $a \in \mathbb{N}$, pentru care card$\{a,\ 3a,\ a + 1\} = 2$.

c Determinați $a \in \mathbb{N}$, astfel încât cardinalul mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot x + a < 9\}$ să fie un element al mulțimii $\{4, 5\}$.

21 Aflați cardinalul mulțimii: $A = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ n \text{ se scrie numai cu cifra 3 și } n < 401\}$.

22 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $2 \in \{1, 2, 3\}$;

b $2 \notin \{3, 4\}$;

c $2 \in \{12, 122, 1222\}$;

d $\{1, 2, 3, 4\}$ conține 3 pătrate perfecte;

e $\text{card}\{2, 3\} < \text{card}\{0, 1, 2\}$;

f $15 \notin \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$.

23 Scrieți în trei moduri diferite mulțimile:

a mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 17 și 28;

b mulțimea numerelor naturale mai mici decât 38, divizibile cu 3;

c mulțimea pătratelor perfecte mai mici decât 225 și mai mari decât 100;

d mulțimea tuturor cuburilor perfecte cuprinse între 7 și 130.

24 Scrieți mulțimea $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ punând în evidență o proprietate comună a elementelor sale.

25 Aflați elementele comune mulțimilor $A = \{13, 14, 15, ..., 73\}$ și $B = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = \overline{ba}\}$.

26 Fie $A = \{x \mid x = u(n^2), n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y \,\vdots\, 2\}$. Determinați elementele comune celor două mulțimi.

27 Enumerați elementele mulțimilor:

a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 10 < 3^x \leq 81\}$;

b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 16 \leq x^2 \leq 625\}$;

c $C = \{x = \overline{abc} \mid 80 < x < 600\}$;

d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 7\}$;

e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 13 < 3x - 5 \leq 22\}$;

f $F = \{a = \overline{xy} \mid \overline{xy} \,\vdots\, 2, x \,\vdots\, 5\}$;

g $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5^x = 125 \text{ sau } 2^x = 1\}$;

h $H = \{x \mid x = 3^n, n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$.

28 **a** Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 7a + 2 \text{ și } a \in A\}$. Determinați elementele mulțimii B.

b Se dau mulțimile $A = \{x \mid 25^{10} < 5^x \leq 125^8\}$ și $B = \{y \mid y = 3 \cdot x - 11 \text{ și } x \in A\}$. Determinați elementele mulțimilor A și B.

29 Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice:

a $A = \{p, i, c, o, r\}$;

b $B = \{1, 6, 11, ..., 501\}$;

c $C = \{1, 3, 6, 10, ..., 210\}$;

d $D = \{1, 2, 6, 24, 120, 720\}$;

e $E = \{1, 3, 7, 15, 31, 63\}$;

f $F = \{0, 1, 8, 81, 1024\}$;

g $G = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$;

h $H = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

30 Fie $A = \{0, 2, 4, 6\}$. Determinați elementele mulțimii $B = \{x \mid x = 3^a - 2^a, a \in A\}$.

31 Scrieți mulțimea A de numere naturale care sunt mai mici decât 71 și care împărțite la 10 dau restul mai mare decât 8.

Rezolvați problema chiar aici:

32 Fie n un număr natural. Considerăm mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^n \leq x \leq 2^{n+2}\}$.

a Determinați cardinalul mulțimii A.

b Determinați numărul n, știind că A are 97 de elemente.

Aprofundare

33 Numerele naturale impare consecutive sunt grupate astfel: $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \ldots$ etc. Determinați suma numerelor din a opta mulțime.

34 Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$. Aflați $\text{card}\{x \in A \mid x \vdots 2 \text{ sau } x \vdots 5\}$.

35 Se dă șirul de mulțimi $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3, 4\}, A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \ldots$.

a Scrieți elementele mulțimii A_4.

b Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2010.

c Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A_{2010}.

36 Fie mulțimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătați că printre oricare nouă elemente ale lui A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele

37 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 1 \in A$;

b dacă $7 \cdot x + 4 \in A$, atunci $x \in A$;

c $9 \in A$.

Arătați că numărul 6 aparține mulțimii A.

38 Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

a mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ este formată din toate elementele mulțimilor A și B;

b fiecare mulțime are câte două elemente;

c dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

39 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$;

b dacă $x^2 + 1 \in A$, atunci $x \in A$;

c $1 \in A$.

Arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii A.

40 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $3 \cdot x \in A$ și $6 \cdot x + 4 \in A$;

b dacă $4 \cdot x + 2 \in A$, atunci $x \in A$;

c $11 \in A$.

Arătați că $2010 \in A$.

I.2 Relații între mulțimi. Submulțimi

Egalitatea. Două mulțimi A și B sunt egale, dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.
În acest caz, orice element care aparține lui A este și element al lui B și reciproc, orice element al lui B aparține și mulțimii A.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține lui B sau invers, se spune că mulțimile A și B sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

Exemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$. Avem $A = B$ și $A \neq C$.

Incluziunea. Mulțimea A este inclusă în mulțimea B și se notează $A \subset B$, dacă orice element al mulțimii A aparține mulțimii B.
Se mai spune și că mulțimea B *include* mulțimea A și se notează $B \supset A$.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este și element al lui B, se spune că mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B și se folosește notația $A \not\subset B$, sau, echivalent, se spune că B *nu include* pe A și se notează $B \not\supset A$.

Exemplu
Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$.
Atunci $A \subset C$, $B \subset C$, $C \supset A$, $C \supset B$, $A \not\subset B$, $C \not\subset A$, $C \not\subset B$, $B \not\subset A$.

Observații
1 Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime: $\varnothing \subset A$.
2 Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$.
3 Dacă A și B sunt două mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$.
4 Dacă A, B și C sunt trei mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.
Proprietățile **2**, **3** și **4** exprimă faptul că relația de incluziune a mulțimilor este *reflexivă*, *antisimetrică* și respectiv *tranzitivă*.
Proprietatea **3** se folosește pentru a demonstra egalitatea a două mulțimi A și B prin *dublă incluziune* (sau *incluziune reciprocă*). Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ atunci $A = B$.

Submulțimi. Dacă mulțimea A este inclusă în mulțimea B, adică $A \subset B$, se spune că mulțimea A este o *submulțime* a mulțimii B.

Exemplu: Mulțimile $U = \{1, 2\}$ și $V = \{1, 3, 5\}$ sunt submulțimi ale lui $M = \{1, 2, 3, 5\}$.

Observații
1 Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.
2 Numărul submulțimilor unei mulțimi A este egal cu $2^{\text{card}\,A}$.
3 Mulțimea submulțimilor (părților) lui A se notează cu $\mathcal{P}(A)$.

Exemplu: Mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ are $2^3 = 8$ submulțimi: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ și A.

Exersare

1 Se dau mulțimile: $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Scrieți, pentru fiecare două mulțimi, dacă una este inclusă în cealaltă sau nu.

2 Fie mulțimea $A = \{0; 1; 2; 3\}$. Dintre următoarele afirmații, adevărată este:

a $2 \notin A$; **b** $\{3\} \in A$; **c** $\{3\} \subset A$; **d** $\{1; 2; 3\} = A$.

3 Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$, $C = \{2, 5, 8\}$, $D = \{1, 4, 2\}$, $E = \{3, 2, 1\}$, $F = \{8, 5, 2\}$, $G = \{4, 1, 2\}$, $H = \{5, 2, 8\}$. Scrieți perechile de mulțimi egale.

4 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $2 \in \{1, 2, 3\}$; **b** $2 \notin \{3, 4\}$; **c** $\{2\} \subset \{2, 3\}$; **d** $\varnothing = \{0\}$;

e $\varnothing \subset \{1, 2\}$; **f** $A \subset A$; **g** $\{2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4\}$.

5 Câte submulțimi are mulțimea $A = \{2, 4, 6, 8\}$?

6 Găsiți numărul natural n pentru care $\{3n + 1, n + 4\} = \{6, 7\}$.

7 Scrieți toate submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

a care nu conțin pe 3; **b** care nu conțin nici pe 1, nici pe 5;

c care conțin pe 5; **d** care conțin pe 2, dar nu conțin pe 3;

e care conțin pe 1, 2 și 3; **f** care conțin pe 1 și 2, dar nu conțin pe 4.

Rezolvați problema chiar aici:

8 Câte numere pare conține mulțimea $P = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^4 < n < 3^3\}$?

Consolidare

9 Știind că mulțimea A are 32 de submulțimi, aflați numărul elementelor mulțimii A.

10 Determinați valorile numerelor naturale x, y, z, t pentru care:

a mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2x + 1, 2x, x\}$ sunt egale;

b mulțimile $A = \{5, 7, 9, 12\}$ și $B = \{4x + 1, 4x + 3, 4y + 1, 4z\}$ sunt egale;

c mulțimile $A = \{3, 7, 11, 15\}$ și $B = \{3x, x - 2, x + 2, 2x + 1\}$ sunt egale;

d mulțimile $A = \{4, 15, 25\}$ și $B = \{t^2, 3t, t - 1\}$ sunt egale.

11 Scrieți o submulțime formată din patru elemente ale mulțimii numerelor naturale care împărțite la 7 dau restul 3.

12 Determinați mulțimile A, astfel încât $\{1, 2, 3\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Rezolvați problema chiar aici:

13 Determinați cardinalul mulțimii $A = \{2^{x+5}, 4^{x+1}, 8^{x+1} \mid x \in \mathbb{N}\}$.

14 Verificați, în fiecare caz, dacă mulțimile A și B sunt egale, unde:

a $A = \{x \mid x \text{ divide } 16, x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 2^n, 0 \le n \le 4\}$;

b $A = \{x \mid 7 < x < 40, x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{y \mid 40 \le 5 \cdot y < 201, y \in \mathbb{N}\}$;

c $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (10^2)^{10x} : (10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^9)^x = 10\,000\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2x + 3x + ... + 10x = 110\}$.

Rezolvați problema chiar aici:

15 Se consideră mulțimile $M = \{14, 4a, 2b + 1\}$ și $P = \{20, 2b, 15\}$. Determinați numerele naturale a și b pentru care mulțimile M și P sunt egale.

16 Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x^3 \le 124\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y = x^2 - 1, x \in A\}$. Determinați elementele celor două mulțimi și precizați câte submulțimi are mulțimea B.

17 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x < 10\}$ și $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$;
b $A \subset B$;
c $C \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 3\}$;
d $\{6, 9, 12\} \subset C$;
e $B \subset C$;
f $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 \le 2^x < 1024\}$;
g $\text{card}\, B = 9$;
h $\varnothing \subset C$;
i $A \subset \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \le 2x + 1 \le 13\}$.

18 Determinați numerele naturale x și y, astfel încât mulțimile: $A = \{2^x, 2^{x-y}, 2^{2 \cdot y}\}$ și $B = \{2^{x-2}, 2^{4-x}, 2^{x+y}\}$ să fie egale.

19 O mulțime A conține 21 de elemente din mulțimea $\mathbb{N}$ și 20 de elemente din mulțimea $\mathbb{N}^*$. Putem preciza un element al mulțimii A? Justificați răspunsul.

Aprofundare

20 Fie o mulțime formată din 10 numere naturale. Arătați *că* există o submulțime a sa cu suma elementelor divizibilă cu 10.

21 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

a Determinați numărul submulțimilor lui A, cu proprietatea că produsul elementelor fiecăreia este cel mult 15.

b Determinați numărul submulțimilor lui A cu trei elemente $\{a, b, c\}$, astfel încât $a + b = 2 \cdot c$.

Rezolvați problema chiar aici:

22 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Determinați numărul mulțimilor $B \subset A$, astfel încât $\{1, 2\} \subset B$.

Probleme de șapte stele

23 Se consideră mulțimea $A = \{5, 10, 15, ..., 2010\}$. Construim șirul de submulțimi ale mulțimii A. $A_1 = \{5, 10\}$, $A_2 = \{15, 20, 25\}$, $A_3 = \{30, 35, 40, 45\}$, ...

a Scrieți mulțimile A_{12} și A_{34}.

b Calculați suma elementelor mulțimii A_{97}.

24 Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 5, ..., 101\}$.

a Aflați numărul perechilor (a, b), $a, b \in A$, $a < b$, astfel încât $a + b = 100$.

b Dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii A este 2010, atunci arătați că cel puțin două elemente sunt egale.

25 Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$.

a Determinați numărul submulțimilor mulțimii A formate din două elemente cu suma egală cu 2011.

b Determinați numărul submulțimilor mulțimii A formate din patru elemente, astfel încât suma a două elemente să fie egală cu suma celorlalte două elemente și să fie egală cu 2011.

Testul 1

(1p) **1** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{1, 4, 9\}$.

(1p) **2** **a** Determinați valorile lui x pentru care mulțimea $\{x, 3\}$ este o submulțime a mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b Câte elemente are mulțimea multiplilor lui 15 mai mici decât 400?

(2p) **3** **a** Determinați cardinalul mulțimii $\{13, 15, 17, ..., 79\}$.

b Determinați cardinalul mulțimii divizorilor numărului 2^5.

(2p) **4** **a** Aflați numărul maxim de mulțimi diferite ce se formează cu numerele 1, 2, 3.

b Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinați numărul submulțimilor de două elemente ale mulțimii A, astfel încât suma elementelor fiecăreia să fie un număr par.

(1p) **5** Aflați mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 4 \leq 12\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 2^3 < 3^y < 2^7\}$.

(2p) **6** Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 5 \cdot n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
Determinați elementele mulțimilor $C = \{x \in A \mid x < 30\}$ și $D = \{y \in B \mid 30 < y < 100\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1** **a** Determinați mulțimea divizorilor numărului 75.

b Determinați mulțimea multiplilor lui 20, mai mici decât 150.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $15 \in \{0, 5, 10, ..., 100\}$;
b $\{1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$;
c $\mathbb{N}^* \subset \{1, 2, 3, ..., 2011\}$;
d $\varnothing \in \mathbb{N}$.

(2p) **3** **a** Determinați elementele mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid (x+2) \vdots 5, x = \overline{ab}\right\}$.

b Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 3, 1 \leq k \leq 5\}$ și $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, 5^3 - 4 \leq y \leq 2^7 - 1\}$.

(2p) **4** Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$. Determinați numărul submulțimilor $B \subset A$, știind că $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, ..., 81\}$.

(2p) **5** Determinați suma elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 2^{100}\}$.

(1p) **6** Se dă mulțimea A cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$;
b dacă $3x + 1 \in A$, atunci $x \in A$;
c $19 \in A$.

Arătați că numărul 1700 aparține mulțimii A.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) **1** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{0, 6\}$.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $18 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; **b** $0 \notin \mathbb{N}^*$;

c $\{6, 7, 8\} \subset \{1, 2, 3, ..., 23\}$; **d** $12 \in \mathbb{N}$.

(2p) **3** **a** Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} | 18 \vdots (x+1)\}$.

b Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} | 6 < x \leq 13\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} | 9 \leq x < 18\}$. Determinați elementele comune celor două mulțimi.

(2p) **4** Determinați elementele comune mulțimilor $A = \{x | x = n! + 4, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y | y = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

(2p) **5** **a** Determinați numărul mulțimilor B știind că $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați numărul submulțimilor lui A cu proprietatea că suma elementelor fiecărei submulțimi este cel mult 6.

(1p) **6** Se dă mulțimea A cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; **b** dacă $x + 1 \in A$, atunci $x \in A$; **c** $19 \in A$.

Arătați că numărul 2026 aparține mulțimii A.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) **1** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{7, 8, 9\}$.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}^*$; **b** $1 \notin \mathbb{N}^*$;

c $\{1, 2, 3, ..., 23\} \subset \{6, 7, 8\}$; **d** $\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$.

(2p) **3** **a** Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} | 15 \vdots (x+1)\}$.

b Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 12\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} | 1 \leq 3^y < 81\}$.

Determinați elementele comune celor două mulțimi.

(2p) **4** Determinați elementele mulțimii $A = \{x \mid x = n^2 + 4, 2^n \leq n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 12\}$.

(2p) **5** **a** Determinați numărul mulțimilor B știind că: $\{1, 2, 3, 4\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinați numărul submulțimilor lui A cu proprietatea că produsul elementelor fiecărei submulțimi este cel mult 15.

(1p) **6** Determinați elementele mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,|\, \overline{xy5} = 5^{x+y}\right\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

A1

Numele și prenumele: ....

Clasa a VI-a:

Tema: Mulțimi. Relații între mulțimi. Submulțimi

(2p) **1** Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect. Numai un răspuns din cele patru este corect.

a Dintre numerele de mai jos, element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$ este:

A 10 **B** 12 **C** 11 **D** 13.

b Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 7\}$ este egală cu:

A $B = \{4, 5, 6\}$ **B** $B = \{5, 6\}$ **C** $B = \{567\}$ **D** $B = \{5, 6, 7\}$.

c Dacă $\{2, 4, 6, 8\} = \{a, b, c, 2\}$, atunci suma $a + b + c$ este egală cu:

A 10 **B** 18 **C** 14 **D** 12.

d Numărul submulțimilor mulțimii $C = \{0, 1, 2\}$ este egal cu:

A 8 **B** 3 **C** 7 **D** 4.

(2p) **2** Completați pe fișă spațiile libere pentru a obține enunțuri adevărate.

a Dacă $\{2, a, b\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, cea mai mare valoare a diferenței $a - b$ este ....

b Valoarea de adevăr a propoziției „$30 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 10\}$” este ....

c Cardinalul mulțimii $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 5, 16 \leq x \leq 36\}$ este egal cu ....

d Dacă $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3y + 1, y \leq n, n \in \mathbb{N}\}$, atunci n este egal cu ....

(2p) **3** Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
a $\text{card}\{x \in \mathbb{N} \mid 24 \leq x < 51\}$ este	**1** 9
b Produsul elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 5, x \leq 126\}$ este	**2** 0
c Suma elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 2x + 1 < 17\}$ este	**3** 28
d Cel mai mic element al mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 > 18\}$ este	**4** 26
	5 27

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) **4** Fie A o mulțime de numere naturale cu proprietățile:

a $80 \in A$;

b dacă $7x + 3 \in A$, atunci $x \in A$;

c dacă $x \in A$, atunci $\{7x + 4, 7x + 5\} \subset A$.

Arătați că 4001 și 4002 sunt elemente ale lui A.

(1p) **5** Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 50\}$. Determinați numărul submulțimilor B ale lui A, știind că $\{1, 2, 3, ..., 46\} \subset B$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.